

**Rachunek całkowy
w zadaniach**

Rachunek całkowy w zadaniach

Jolanta Dymkowska

Danuta Beger

Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego
Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej
Dariusz Mikielewicz

Recenzent
Tomasz Szarek

Redakcja językowa
Agnieszka Frankiewicz

Projekt okładki
Ewa Niziołkiewicz

Przygotowanie do druku
Danuta Beger, Jolanta Dymkowska

Wydanie II – 2017

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór w całości lub we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany
w jakiegokolwiek formie i w jakikolwiek sposób bez pisemnej zgody posiadaczy praw autorskich.

© Copyright by Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki, Gdańsk 2023

ISBN 978-83-7348-898-4

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie III. Ark. wyd. 12,9, ark. druku 14,5, 1220/1096

Druk i oprawa: Volumina.pl sp. z o.o.
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

Spis treści

Przedmowa	7
1. Całka nieoznaczona	9
1.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona	9
1.2. Własności całki nieoznaczonej	13
1.3. Całkowanie przez podstawianie	14
1.4. Całkowanie przez części	16
1.5. Całkowanie funkcji wymiernych	20
Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste	20
Całkowanie ułamków prostych	22
Całkowanie funkcji wymiernych	24
1.6. Całkowanie funkcji trygonometrycznych	26
1.7. Całkowanie funkcji niewymiernych	28
Całki z funkcji zawierających pierwiastki z wyrażenia liniowego	28
Całki z funkcji zawierających pierwiastek kwadratowy z trójmianu	29
Metoda współczynników nieoznaczonych	33
1.8. Zadania do samodzielnego rozwiązania	36
2. Całka oznaczona	47
2.1. Definicja Riemanna całki oznaczonej	47
2.2. Własności całki oznaczonej	51
2.3. Obliczanie całki oznaczonej	55
Związek całki oznaczonej z całką nieoznaczoną	55
Twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie i przez części	57
2.4. Całki niewłaściwe	59
Całka oznaczona w przedziale nieskończonym	59
Całka funkcji nieograniczonej	62
2.5. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej	67
Pole obszaru płaskiego	67
Długość łuku	79
Objętość i pole powierzchni bryły obrotowej	82
2.6. Przykłady różnych zastosowań całki oznaczonej	88
Zastosowania całki oznaczonej w mechanice	88

Zastosowania całki oznaczonej w fizyce	91
Zastosowania całki oznaczonej w chemii	94
Zastosowania całki oznaczonej w ekonomii	97
2.7. Zadania do samodzielnego rozwiązania	100
3. Całka podwójna	113
3.1. Całka podwójna i jej własności	113
Obliczanie całki podwójnej po prostokącie	119
Obliczanie całki podwójnej po obszarze normalnym	120
3.2. Zamiana zmiennych w całce podwójnej	128
Współrzędne biegunowe	131
Współrzędne eliptyczne	136
3.3. Zastosowania geometryczne całki podwójnej	139
Pole obszaru płaskiego	139
Objętość bryły	143
Pole płata	148
3.4. Zastosowania całki podwójnej w mechanice	150
3.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania	154
4. Całka potrójna	163
4.1. Całka potrójna i jej własności	163
Obliczanie całki potrójnej po prostopadłościanie	168
Obliczanie całki potrójnej po obszarze normalnym	170
4.2. Zamiana zmiennych w całce potrójnej	173
Współrzędne walcowe	174
Współrzędne sferyczne	180
4.3. Zastosowania geometryczne całki potrójnej	186
4.4. Zastosowania całki potrójnej w mechanice	192
4.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania	199
Odpowiedzi do zadań	205
Bibliografia	227

Przedmowa

*Ustyszałem i zapomniałem.
Zobaczyłem i zapamiętałem.
Zrobiłem i zrozumiałem.*

Konfucjusz

Tę myśl wybitnego chińskiego filozofa kierujemy do wszystkich studentów, którzy zechcą nie tylko wziąć do ręki ten podręcznik, ale również z jego pomocą rozszerzyć i uzupełnić swoją wiedzę i umiejętności z rachunku całkowego. Niniejszy skrypt jest próbą uzupełnienia wykładów akademickich i wsparciem w samodzielnym zgłębianiu zawartej w nim tematyki.

Mamy świadomość, że – zarówno w Polsce, jak i za granicą – napisano wiele podręczników i monografii, przy czym tylko niektóre stały się pozycjami klasycznymi. Istnieją wszakże przynajmniej dwie racje, dla których – po pewnych wahaniach – zdecydowaliśmy się na przygotowanie niniejszego skryptu. Pierwszą rację stanowi jego elementarny charakter. Podręczniki elementarne i skrypty sporadycznie stają się klasyką, ale studentom są zawsze bardzo potrzebne, czasami wręcz niezbędne. Obecnie, z powodu częstych zmian programowych w szkolnictwie gimnazjalnym i ponadgimnazjalnym, skutkujących zmniejszaniem zakresu wiedzy przekazywanej uczniom, nawet bardziej potrzebne niż kilkanaście lat temu. Po drugie, znacznie wzrosła liczba kierunków studiów, na których ta wiedza jest niezbędna. Przy tym często nie tylko trzeba słuchaczom przedstawiać materiał od podstaw, lecz również pokonywać uprzedzenia do matematyki jako przedmiotu nauczania. Zwłaszcza studenci, którzy przychodzą na wykład matematyczny niekoniecznie powodowani ciekawością, lecz przede wszystkim potrzebą uzyskania zaliczenia semestru, bywają pełni uprzedzeń, uważając przedmiot ten za relikwiny epoki przedinformatycznej.

Niniejszy podręcznik ma zatem stanowić pomoc dla studentów zarówno w ćwiczeniu umiejętności całkowania, jak i w samodzielnym zgłębianiu tej tematyki. Książka, którą przekazujemy do rąk czytelników, zawiera około tysiąca rozwiązanych ćwiczeń oraz zadań do samodzielnego rozwiązania, w tym również zadania z zastosowań rachunku całkowego. Ze względu na obszerność tematyki zastosowań rachunku całkowego w innych dziedzinach postanowiliśmy ograniczyć je tylko do klasycznych zastosowań w mechanice, fizyce, chemii i ekonomii. Każdy rozdział zawiera podstawy teoretyczne zilustrowane przykładami i jest zakończony dużą liczbą zadań do samodzielnego rozwiązania. Zróżnicowanie stop-

nia trudności zadań umożliwi korzystanie z podręcznika studentom różnych kierunków studiów i o różnym stopniu zaawansowania wiedzy w tym zakresie.

Ujęcie zagadnień, które obejmuje ten podręcznik, jest wynikiem wieloletnich doświadczeń i zostało wypracowane z udziałem naszego nieżyjącego od kilku lat wspianego kolegi – dr. Józefa Kamińskiego (1943–2011). Nasz nieodżałowany kolega, wieloletni nauczyciel akademicki na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, a następnie w Studium Nauczania Matematyki Politechniki Gdańskiej, był znakomitym dydaktykiem i wspianym starszym kolegą po fachu – mistrzem dla młodszych współpracowników. Naszą pracę dedykujemy jego pamięci.

Dziękujemy również naszym koleżankom i kolegom z Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość Politechniki Gdańskiej za cenne uwagi i wskazówki, które na pewno bardzo pozytywnie wpłynęły na ostateczny kształt skryptu.

W niniejszym, trzecim wydaniu skryptu wprowadzono poprawki uwzględniające uwagi, które zostały zgłoszone przez studentów w trakcie zajęć prowadzonych na Politechnice Gdańskiej w ubiegłych latach.

Autorki